修士論文概要書

2008 年 7 月提出　　学籍番号 $3605U144-0$
専攻名（専門分野）情報・ネットワーク専攻　　氏名　麻生香雄
研究指導名　数値解析研究　　指導教員　柏木雅英

研究題目　アフィン演算を利用した非線形方程式の全解探索法のアルゴリズムの改良

1　背景と目的

方程式を解いたり、積分を求めるといった連続数学の問題を計算機を使って解く研究が起こり、このような数値計算の理論は発達し多くの成果をあげてきた。近年、精度保証付き数値計算という分野が発展し、得られた近似解と真の解の誤差がどのくらいなのか、あるいは近似解の近くに真の解が存在するのかどうかといった、近似解の正しさを数学的に保証する技術が考えられている。このような問題のひとつである m 個の変数と m 個の方程式からなる非線形連立方程式

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1,\cdots,x_m)=0\\
\vdots\\
f_m(x_1,\cdots,x_m)=0
\end{gathered}
$$

の与えられた m 次元超直方体領域

$$
\begin{aligned}
X^{(0)} &= (X_1^{(0)},\cdots,X_m^{(0)})^T\\
&= ([\underline{X_1^{(0)}},\overline{X_1^{(0)}}],\cdots,[\underline{X_m^{(0)}},\overline{X_m^{(0)}}])^T
\end{aligned}
$$

内の全ての解を求めるには区間解析に基づく方法がよく知られていた。この方法のおおまかな手順は

step1
区間演算を用いて解が探索領域 X 内に存在しないための十分条件の判定 (解の非存在判定) を行う。X 内に解が存在しないことが言えたら X を捨てる。言えない場合は **step2** へ。

step2
区間演算を用いて解が探索領域 X 内に一意的に存在するための十分条件の判定 (解の存在判定) を行う。X 内に解が一意的に存在することが言えたら X を保存する。言えない場合は **step3** へ。

step3
探索領域 X を二分割し、それぞれの領域に対して再帰的な判定を行う。

である。
この方法を利用すれば、非線形方程式の全ての解を原理的には有限時間で求めることができる。しかし、この方法は対象とする方程式が大規模になると膨大な計算時間を必要とするという欠点をもつ。上記の手順から分かるように、この方法の効率化を図るためには、解が存在しない領域、解が一意的に存在する領域を早い段階で (多くの分割が行われる前に) 検出し、除去、保存をする優れた存在判定法、非存在判定法の確立が必要となる。つまりこの方法で用いられている存在判定法、非存在判定法は必ずしも優れた方法ではなかった。この原因の一つには区間演算の問題点である関数値の上下限の過大評価が挙げられる。
本論文では、先の step3 における分割手法に着目した。従来は 3 次元でいえば直方体領域である探索領域を立方体に近づけるような方針で探索領域の分割を行ってきた。これは領域の形状と判定の成功のし易さのバランスを意識した方法であった。しかしこの方法は問題のスケールの変化によって、全く同じ問題でも分割回数の増加を生じることがある。本論文では従来の最大値ノルムに代わるスケーリングノルムの導入により新しい分割方法を提案する。ノルムを用いた判定の場合、解の存在は判定していても（step1 を満たす）、解の一意性が保証されない（step2 を満たさない）ために再び分割され探索を繰り返す区間が当然出現する。もちろんそのような区間の中には、解が複数存在する区間も多いが、中には最大値ノルムを使用したがために、本来は立派な解であるにも関わらず判定に漏れる区間も少なくない。そのような判定漏れを防ぐために、従来は意識していなかった探索区間の区間幅が与える影響を加味し、より無駄の省かれた探索が出来るように考案されたのがスケーリングノルムである。スケーリングノルムを実装し、最大値ノルムの場合と比較することで、従来より少ない回数の分割で解を求め

ることを目的とする。

2　スケーリングノルムの定義

m 次元列ベクトル $w^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, m)$ を次のように定義する。

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w^{(p)}$ は p 番目の要素だけが 0.5 で、他の要素が全て 1 である列ベクトルである。
R の p ノルム $||R||_u^{(p)}$ を次のように定義する。

$$||R||_u^{(p)} = \max_i (\sum_j |R_{ij}| u_j w_j^{(p)} / u_i w_i^{(p)}) \qquad (1)$$

3　提案分割方法

探索領域が分割されることで起こる区間幅の半減が与える影響を事前に求める式 (1) を利用する。
解の唯一存在を保証する $Krawczyk$ 法におけるパラメータ R はノルムが小さい方が好ましい。そこで提案するのが

$$\min_p ||R||_u^{(p)} \qquad (2)$$

を満たす p を求め、探索領域 X の X_p を２分割することで探索領域を分割する方法である。
この提案は事前に分割後の R の変化を大まかに予想することで、従来の最も区間幅の大きい区間から２分割していく方法よりも効率的に非線形方程式の全解探索を行うことを期待するものである。

4　スケーリング

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

探索領域 $x_i = [-10, 10] \quad (i = 1, 2)$

$$\begin{cases} x_1^2 + 100x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases}$$

探索領域 $x_1 = [-10, 10], x_2 = [-1, 1]$

例えば上記二問は実質的に同じ問題である。下の問題は上の問題の x_2 の係数を 10 倍して探索領域を $\frac{1}{10}$ 倍にしている。幾何的にいえば、下の問題は上の問題を x_2 の方向について縮めたものである。しかしながら、全解探索を行うとその効率に差が生じることがある。
本論文ではこのようなスケーリングを変化させた問題（実質同じ問題）に関して、従来の方法よりも効率良く解を探索することを目標とする。

5　結果

本研究では複数の問題を色々なケースで実験してみて、従来の結果と比較検証した。それらは膨大な量になり、またその内一つを挙げたとしても有効でないので、数値例は本論文自体を参照されたい。
結果、当初予想していた通り、スケーリングの変化による従来の方法の危険性については、本提案で解決できた。
本提案の目的のひとつである、従来の分割方法の絶対的有効性については一石を投じることが出来たのではないかと思う。
しかしながら、非線形方程式の問題は多岐に渡るため、必ずしも本提案も従来に比べて優位でないことも発覚した。
少しの変化、工夫で思いかけない結果を出すことのある分野であるので、今後も新しい分割方法が考案されることを期待する。